

Examen terminal Algorithmie Avancée

L3 MPCl

13 janvier 2026 - Durée: 2h

Lorsque l'on vous demande d'écrire de décrire ou de donner un algorithme cela signifiera toujours en donner un pseudo-code, justifier de son exactitude et de sa complexité

On rappelle qu'aucun document ni équipement électrique ou électronique n'est autorisé.

Les trois exercices sont indépendants ; les deux premiers valent chacun un quart des points totaux.

Pour toutes les questions :

- les graphes seront considérés non orientés,
- le nombre de sommets d'un graphe vaudra n ,
- le nombre d'arêtes d'un graphe vaudra m ,

EXERCICE 1 — MÉTHODE PROBABILISTE

On va utiliser la méthode probabiliste pour démontrer des résultats sur les problèmes SAT et k -SAT.

Soient $x_1, \dots, x_n$, n variables booléennes. On définit :

- un ***littéral*** l comme étant soit une variable $l = x_i$, soit sa négation $l = \overline{x_i}$
- une ***clause*** comme étant une disjonction de littéraux $c = l_1 \vee \dots \vee l_k$ avec $l_1, \dots, l_k$ des littéraux portant sur k variables différentes
- une ***conjonction de clauses*** comme étant $f = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ (avec $c_1, \dots, c_m$ des clauses)

Le problème SAT cherche à savoir s'il existe des valeurs pour lesquelles f est vraie. Si tel est le cas, la conjonction de clauses est dite ***satisfiable***.

Pour une assignation $x_i = v_i \in \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ donnée, on dira qu'une clause est ***satisfaite*** si elle est vraie pour cette affectation et on notera $S(f, v_1, \dots, v_n)$ le nombre de clauses de f satisfaites. Enfin on notera $S(f) = (\max S(f, v_1, \dots, v_n))/m$ la proportion maximale de clauses satisfaites (si f est satisfiable alors $S(f) = 1$).

1.1 SAT

Question 1.1.1 Rappelez les définitions des ensembles NP et NP-complet et pourquoi le problème SAT y est associé.

Question 1.1.2 Pour une conjonction de m clauses f donnée, que peut-on dire de $S(f, v_1, \dots, v_n) + S(f, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$?

Question 1.1.3 En déduire que $1/2 \leq S(f) \leq 1$ quelque soit f . Donnez une conjonction de clause telle que $S(f) = 1/2$.

Question 1.1.4 Donnez un algorithme de complexité linéaire rendant une assignation satisfaisant d'au moins la moitié des clauses d'une conjonction de clauses f passée en paramètre.

1.2 k -SAT

une k -clause est une clause constituée d'exactly k littéraux.

Question 1.2.1 Pour une affectation aléatoire des variables, quelle est la probabilité qu'une k -clause soit non satisfaite ?

Question 1.2.2 En déduire que toute conjonction de $m < 2^k$ k -clauses est satisfiable.

Question 1.2.3 Montrez que pour toute conjonction f de m k -clauses on a $S(f) \geq 1 - \frac{1}{2^k}$

Question 1.2.4 Conclusions pour une conjonction f de m 3-clauses ?

EXERCICE 2 — GRAPHS

Question 2.1 Rappelez la définition de clique et de clique maximale d'un graphe.

Question 2.2 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses cliques maximales. Montrez que si quelque soit $x \in V$ on a $|\{C \mid x \in C, C \in \mathcal{C}\}| = 1$ (x n'appartient qu'à une seule clique maximale de G), alors G est le graphe complet.

Question 2.3 Soit G un graphe connexe et non complet d'au moins 3 sommets. Montrer qu'il existe un sommet x appartenant à au moins deux cliques maximales différentes.

Question 2.4 Soit G un graphe connexe. Montrer que supprimer un sommet x n'appartenant qu'à une seule clique maximale ne déconnecte pas le graphe.

Question 2.5 Donnez un algorithme permettant de savoir si un sommet x donné est dans une seule clique maximale d'un graphe G .

EXERCICE 3 — ENQUÊTE POLICIÈRE

On doit cet exercice à Claude Berge qui l’a publié en 1994 sous le nom de *Qui a tué le duc de Densmore ?* dans le fascicule 67 de la bibliothèque Oulipienne (voir <https://iti.mff.cuni.cz/series/2013/598.pdf> p75-90).

Le récit : *Les huit récits suivants qui relatent des événements précédant le meurtre du duc de Densmore (découvert plus d’une année trop tard) ont été recueillis par le détective Ralston de Scotland Yard auprès des huit dernières personnes à avoir vu le duc en vie (à des moments différents), à savoir :*

- Miss **F**elicia Wynn (mannequin rencontrée par le duc à bord du Sam Loyd au cours d’une croisière en Méditerranée)
- Lady **C**ynthia Mansfield (joueuse professionnelle au casino de Monte-Carlo)
- Mrs **G**orgia Blake (théosophe végétarienne et spirite)
- Miss **D**iana Macleod (traductrice du livre de Georges Perec *Les Choses*)
- Miss **E**mily Healey (lépidoptériste rousse)
- Miss **A**nn Laybourn (joueuse d’échecs avec un ELO à 2075)
- Miss **B**etty Townsend (pianiste)
- Miss **H**elen Grimshaw (jeune comédienne ayant joué à treize ans le rôle de Zazie à Nottingham, et à seize ans celui de Vittoria dans *Le Démon Blanc* de Webster)

En raison de l’ancienneté des événements, ces huit personnes n’ont pu se rappeler les dates exactes de leurs séjours respectifs chez le duc, et les récits qui s’y rapportent ne figurent donc pas ici dans l’ordre chronologique.

[...]

didascalie Vous lirez la nouvelle en entier pour vous imprégner de l’histoire ce soir, mais pour que tout cela tienne dans le temps de l’examen, je résume.

Le duc est mort dans l’explosion de son manoir et votre mission est de trouver l’assassin, en sachant que :

- L’assassin est une des 8 femmes
- Chaque personne n’est venue qu’une seule fois au château
- Aucune autre personne n’est venue au château
- Pendant leur séjour au château :
 - A a rencontré B, C, E, F, et G
 - B a rencontré A, C, et H
 - C a rencontré A, B, D, E, et H
 - D a rencontré C, et E
 - E a rencontré A, C, D, et F
 - F a rencontré A, et E
 - G a rencontré A, et H
 - H a rencontré B, C, et G
- L’assassin a dû se cacher pour fabriquer la bombe : pendant qu’elle était cachée elle n’a rencontré personne et personne n’a pu la voir.

3.1 Étude préliminaire

Question 3.1.1 Représentez les relations de rencontre entre les 8 femmes par un graphe dont les sommets sont les 8 femmes et les arêtes les rencontres.

Question 3.1.2 Montrer que si personne ne s’était caché on pourrait retrouver ce graphe en connaissant les dates d’arrivée et de départ de chacune des 8 femmes.

Question 3.1.3 Qu'en déduire pour du graphe de rencontre de la question 3.1.1 ?

3.2 Graphes d'intervalles

Si $I_1, \dots, I_n$ sont n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, on appelle graphe d'intersection de ces intervalles le graphe $G = (V, E)$ où :

- $V = \{I_1, \dots, I_n\}$
- $xy \in E$ si $x \cap y \neq \emptyset$

On appelle **graphe d'intervalles** un graphe $G = (V, E)$ pour lequel il existe n intervalles fermés de $\mathbb{R}$ tels que G soit son graphe d'intersection.

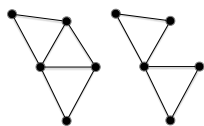


FIGURE 1 – Deux graphes d'intervalles connexes

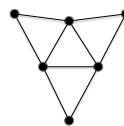


FIGURE 2 – Un graphe interdit

Question 3.2.1 Donnez les graphes d'intervalles associées à :

- $V = \{[1, 5], [1, 4], [3, 7], [6, 10]\}$
- $V = \{[1, 5], [1, 4], [3, 7], [5, 10]\}$

Question 3.2.2 Donnez des intervalles associés aux deux graphes connexes de la figure 1 et montrez qu'il peut y avoir plusieurs solutions.

Question 3.2.3 Montrez que les graphes complets et discrets sont des graphes d'intervalles

Question 3.2.4 Montrez que si $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles alors la restriction de G à V' est un graphe d'intervalles pour tout $V' \subseteq V$.

Question 3.2.5 Montrez que les cycles sans corde (il n'existe aucune autre arête que celles du cycle) de strictement plus de 3 arêtes ne peuvent être des graphes d'intervalles.

Question 3.2.6 Montrez que le graphe de la figure 2 ne peut pas être un graphe d'intervalles.

3.3 Résolution de l'énigme

Question 3.3.1 Montrez que le graphe de la question 3.1.1 n'est pas un graphe d'intervalles.

Question 3.3.2 Explicitez pourquoi en supprimant l'assassin du graphe de la question 3.1.1 on obtient un graphe d'intervalles. En déduire une procédure permettant de terminer l'assassin.

Question 3.3.3 En utilisant les questions 3.2.5 et 3.2.6 déterminez la personne qui s'est cachée, *ie.* l'assassin.

Question 3.3.4 Puisque seul l'assassin a menti, reconstituez un graphe d'intersection possible. Montrez qu'il peut y en avoir plusieurs. Combien de fois au minimum l'assassin s'est-il caché ?

Question 3.3.5 En utilisant votre graphe de la question 3.3.4 représentez une solution possible pour les intervalles de présence des 8 femmes. Y en-a-t-il plusieurs possibles ?