Devoir Surveillé Algorithmie Avancée

L3 MPCI

8 octobre 2025 - Durée: 1h30

Lorsque l'on vous demande d'écrire de décrire ou de donner un algorithme cela signifiera toujours en donner un pseudo-code, justifier de son exactitude et de sa complexité

On rappelle qu'aucun document ni équipement électrique ou électronique n'est autorisé.

Les exercices :
- sont au nombre de 3 ;
- sont indépendants ;
- abordent des sujets différents ;
- sont également jolis et intéressants

Exercice 1 – Tournois

Un tournoi est un graphe orienté tel que pour tout couple de sommets $\{x, y\}$, soit xy soit yx est un arc mais pas les deux.

1.1 Introduction

Question 1.1.1 Dessinez un tournoi à 5 sommets.

Question 1.1.2 Combien d'arêtes possède un tournoi à n sommets ?

Question 1.1.3 Combien y a-t-il de tournois à n sommets ?

Question 1.1.4 Montrez que tout tournoi possède un chemin hamiltonien (c'est du cours).

Question 1.1.5 En déduire un algorithme récursif dont vous donnerez la complexité pour trouver un chemin hamiltonien dans un tournoi.

1.2 méthode probabiliste

Question 1.2.1 Montrer que si l'on prend un tournoi à n sommet dont on a tiré l'orientation de chaque arc de façon uniforme et indépendante, la probabilité qu'un chemin hamiltonien donné existe est de $1/2^{n-1}$.

Question 1.2.2 En utilisant la question précédente montrer qu'il existe des tournois à n sommets avec plus de $n!/2^{n-1}$ chemins hamiltoniens différents.

Question 1.2.3 Donnez-en un exemple pour 5 sommets.

1.3 transitivité

Un tournoi $T = (V, E)$ est transitif si pour tout triplet $\{x, y, z\}$ de sommets : si xy et yz sont des arcs alors xz aussi.

Question 1.3.1 Montrez qu'un tournoi transitif ne possède qu'un seul chemin hamiltonien.

Question 1.3.2 Montrer que si pour un chemin hamiltonien $x_1 \dots x_n$ d'un tournoi non transitif il existe un arc $x_n x_i$ ou un arc $x_i x_1$, alors il existe (au moins) un deuxième chemin hamiltonien.

Question 1.3.3 Montrer que si $x_1 \dots x_n$ est un chemin hamiltonien d'un tournoi non transitif mais que l'on est pas dans le cas de la question précédente il existe un arc :

— $x_j x_i$ avec $1 < i < j < n$ tel que pour tout $i' < i < j < j'$ $x_{i'} x_{j'}$ est un arc,

— $x_u x_v$ avec $1 < i < u < j < v \leq n$ tel que pour tout $u < u' < i < j < v$ $x_{v'} x_{u'}$ est un arc.

Question 1.3.4 Montrer que si on est dans le cas de la question précédente il existe (au moins) un deuxième chemin hamiltonien.

Question 1.3.5 En déduire qu'un tournoi ne possède un seul chemin hamiltonien que si et seulement si il est transitif.

Exercice 2 – Isomorphisme d'arbres

Si $T = (V, E)$ et $T' = (V', E')$ sont deux arbres, un isomorphisme entre T et T' est une bijection $\sigma : V \to V'$ telle que $xy \in E$ si et seulement si $\sigma(x)\sigma(y) \in E'$. Un automorphisme est un isomorphisme entre T et lui même.

2.1 arbres de Cayley

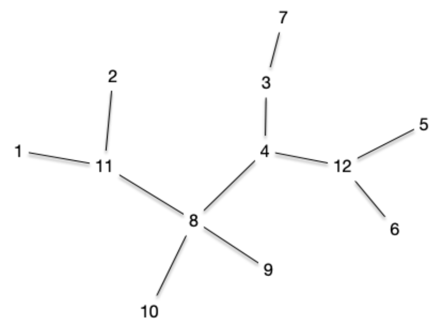

FIGURE 1 – Un arbre de Cayley.

Question 2.1.1 Donnez un automorphisme de l'arbre de la figure 1 qui ne soit pas l'identité.

Question 2.1.2 Montrez que pour tout isomorphisme d'arbre σ entre T et T', si x est une feuille de T alors $\sigma(x)$ est une feuille de T'.

Question 2.1.3 En déduire (vous pourrez utiliser la question précédente et effeuiller) que pour tout automorphisme σ d'un arbre, il existe soit :
- — un sommet invariant x tel que $x = \sigma(x)$,
- — une arête invariante xy telle que $y = \sigma(x)$ et $x = \sigma(y)$.

Question 2.1.4 Donnez (en le justifiant) le sommet ou l'arête invariante pour tout automorphisme de l'arbre de la figure 1

Question 2.1.5 Donnez la définition d'un arbre de Cayley planté. Pourquoi est-ce différent d'un arbre planaire ?

2.2 encodage d'arbres planaires

On considère l'encodage récursif $E(T)$ d'un arbre planaire suivant :
- — si l'arbre T est réduit à un sommet alors $E(T) = []$
- — sinon $E(T) = [E(T')$pour chaque enfant de T dans l'ordre$]$

Chaque sommet est associé à une liste dont les éléments sont les encodage de ses enfants dans l'ordre de parcours. Par exemple l'encodage de l'arbre planaire gauche de la figure 2 est [[], [[], []]]

Question 2.2.1 Donnez l'encodage de l'arbre de droite de la figure 2.

Question 2.2.2 Donner un algorithme linéaire permettant de rendre l'encodage d'un arbre planaire.

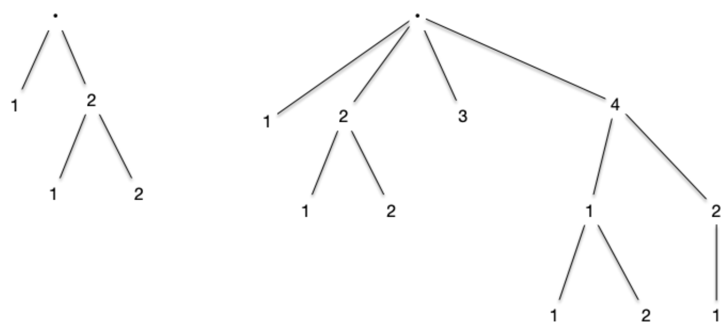

FIGURE 2 – Deux arbres planaires.

Question 2.2.3 Quelle est la somme des tailles des listes imbriquées encodant un arbre planaire ?

2.3 Arbres planaires isomorphes

Question 2.3.1 Montrez que tous les automorphismes d'un arbre planté correspondent à des ordres différents des listes de l'encodage de l'arbre.

Question 2.3.2 Donnez tous les automorphismes de l'arbre planaire de gauche de la figure 2.

Question 2.3.3 Combien d'automorphismes différents possède l'arbre planaire de droite de la figure 2 ?

Question 2.3.4 Montrer que deux arbres planaires sont isomorphes si et seulement si le tri de leurs encodages est identique (en utilisant par exemple le tri des listes (possiblement imbriquées) de python).

Question 2.3.5 En déduire un algorithme dont vous donnerez la complexité permettant de savoir si deux arbres planaires sont isomorphes.

2.4 Arbres de Cayley isomorphes

Question 2.4.1 Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de savoir si deux arbres de Cayley sont isomorphes.

Question 2.4.2 Appliquez votre algorithme à l'arbre de Cayley de la figure 1 et à son arbre isomorphe que vous avez donné question 2.1.1

Exercice 3 – Coloration (et planarité)

On considère le problème suivant :
- **Nom :** 3-Col
- **Entrée :** un graphe
- **Question :** le graphe en entrée est-il 3 colorable ?

On sait que le problème 3-Col est NP-complet.

3.1 cours

Question 3.1.1 Rappelez définition d'une k-coloration d'un graphe.

Question 3.1.2 Montrer que 3-Col $\leq$ 4-col

3.2 Une 3 coloration particulière

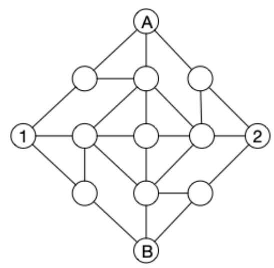

FIGURE 3 – Un graphe 3 colorable.

Question 3.2.1 Montrez que le graphe de la figure 3 est 3 colorable.

Question 3.2.2 Donnez une 3-coloration du graphe de la figure 3.

Question 3.2.3 Montrez que tout 3-coloration du graphe de la figure 3 est telle que :
- la couleur de A est la même que la couleur de B,
- la couleur de 1 est la même que la couleur de 2.

Question 3.2.4 Montrez que fixer les couleurs des sommets A et 1 est suffit pour déterminer une 3-coloration du graphe de la figure 3.

3.3 Une 3 coloration planaire

On considère le problème suivant :
- **Nom :** 3-Col-planaire
- **Entrée :** un graphe planaire
- **Question :** le graphe en entrée est-il 3 colorable ?

Question 3.3.1 Donnez une définition d'un graphe planaire

Question 3.3.2 Déduire des parties précédentes que le problème 3-Col-planaire est NP-complet (vous pourrez utiliser le graphe 3-colorable pour transformer un dessin non planaire de G en un dessin planaire).

Question 3.4 On sait que tout graphe planaire est 4-colorable. Donnez un argument qui montre qu'il est très improbable qu'il existe un algorithme polynomial pour 4-colorer un graphe planaire.